Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….087**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,\ 2,3)$ la planul $x+2y+3z-4=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2+2y^2=12$ dusă prin punctul $P(2,2)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2)$, $M(2,3)$ și $N(3,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,1,1)$ și $D(1,2,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{2+3i}{4+5i}=a+bi\ .$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 şi rația este 2 , să se calculeze termenul al douăzecilea .

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in \mathbf{Z}_5$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{x}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+1$ are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(0)+g(-31)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2+7\right)=\log_2\left(2x^2+3\right)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^3-X-24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mulțimile $I(A) = \{ g(A) \mid g \in \mathbf{Q}[X] \}$ şi $J(A) = \{ aA + bI_2 \mid a, b \in \mathbf{Q} \}$ şi polinomul $f = X^2 - X + 1$.

(Dacă avem polinomul $g = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, atunci prin matricea $g(A)$ înțelegem $g(A) = a_0 I_2 + a_1 A + ... + a_n A^n$.)

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se verifice că $f(A) = O_2$.

(2p) **d)** Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

(2p) **e)** Să se arate că $I(A) = J(A)$.

(2p) **f)** Să se arate că polinomul f nu se poate scrie ca produs de polinoame de gradul întâi cu coeficienți în $\mathbf{Q}$.

(2p) **g)** Să se arate că orice matrice nenulă din $J(A)$ este inversabilă şi inversa sa este tot în $J(A)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ şi $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$ şi $F(0)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția F este concavă pe intervalul $[0, \infty)$ şi este convexă pe intervalul $(-\infty, 0]$.

(2p) **e)** Să se arate că $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că $f(x) \leq \frac{1}{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că şirul $(F(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent.